

5.3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

5.3.1. ФОРМУЛЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Одним из классических методов вычисления определенных интегралов является применение *функциональных квадратурных формул*

$$I_a^b = \int_a^b f(x)dx \cong \sum_{j=1}^N q_j f(x_j) \equiv \hat{I}_a^b, \quad (5.42)$$

где q_j — *весовые коэффициенты*; $x_j, j = \overline{1, N}$, — некоторые точки отрезка $[a, b]$; N — число точек (*узлов квадратурной формулы*).

Квадратурная формула называется *точной* для многочленов степени m , если при замене функции $f(x)$ на произвольный алгебраический многочлен степени не выше m приближенное равенство (5.42) становится точным. В этом случае говорят, что квадратурная формула обладает *m -свойством*.

Замечания

1. При приближенном вычислении интеграла, как правило, отрезок $[a, b]$ представляется в виде объединения l непересекающихся частичных отрезков вида $[x_{i-r}, x_{i+s}]$, которым соответствует шаблон $\Pi_{k,i} = (x_{i-r}, \dots, x_i, \dots, x_{i+s})$, где i — номер базового узла сетки; r и s — количество узлов левее и правее узла с номером i ; $k = r + s + 1$ — общее число узлов (точек) в шаблоне (рис. 5.1). На каждом частичном отрезке с номером $j = 1, \dots, l$ вычисляется интеграл по соответствующей квадратурной формуле

$$I_{i-r}^{i+s,j} = \int_{x_{i-r}}^{x_{i+s}} f(x)dx \cong \hat{I}_{i-r}^{i+s,j} \equiv \hat{I}^j, \quad j = 1, \dots, l, \quad (5.43)$$

а затем полученные значения суммируются по всем частичным отрезкам, т. е.

$$\hat{I}_a^b = \sum_{j=0}^l \hat{I}^j = \sum_{j=0}^l \hat{I}_{i-r}^{i+s,j}. \quad (5.44)$$

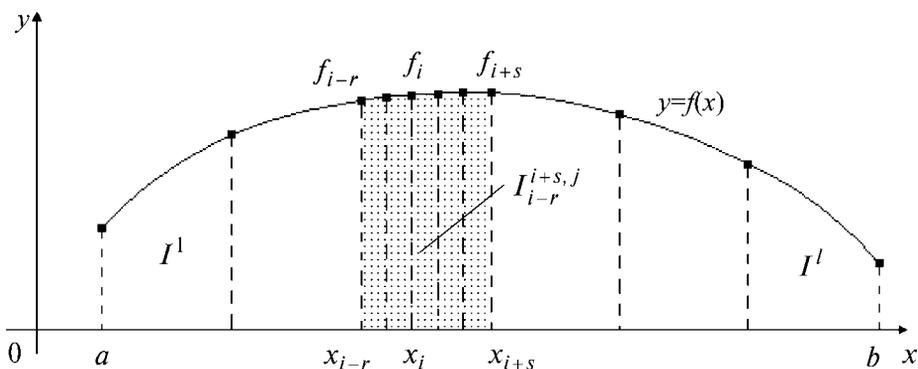


Рис. 5.1

2. Далее в силу использования представления (5.44) проблеме вычисления интеграла (5.43) на частичном отрезке уделяется основное внимание. По заданной сеточной функции или сеточному представлению формульной функции на частичном отрезке строится интерполяционный многочлен некоторой степени. Значение \hat{I}_{i-r}^{i+s} определяется величиной интеграла от этого многочлена.

Как следует из замечаний, для вычисления интеграла могут использоваться различные частичные отрезки и соответствующие им шаблоны. Рассмотрим процедуру получения простейших формул численного интегрирования на двухточечном и трехточечном шаблонах, наиболее часто описываемых в учебной литературе и используемых на практике.

А. Двухточечный шаблон. На частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, которому соответствует двухточечный шаблон $\Pi_{2,i} = (x_i, x_{i+1})$, где $r = 0, s = 1$, заменим функцию $f(x)$ двумя способами:

а) интерполяционным многочленом нулевой степени:

$$L_0(x) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

построенным по значению функции $f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$ в середине частичного отрезка $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (рис. 5.2а);

б) интерполяционным многочленом первой степени $L_1(x)$ с узловыми значениями x_i, x_{i+1} :

$$L_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1} = \left(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1} = (1 - q) f_i + q f_{i+1},$$

где q — фаза интерполяции, $q = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ (рис. 5.2б).

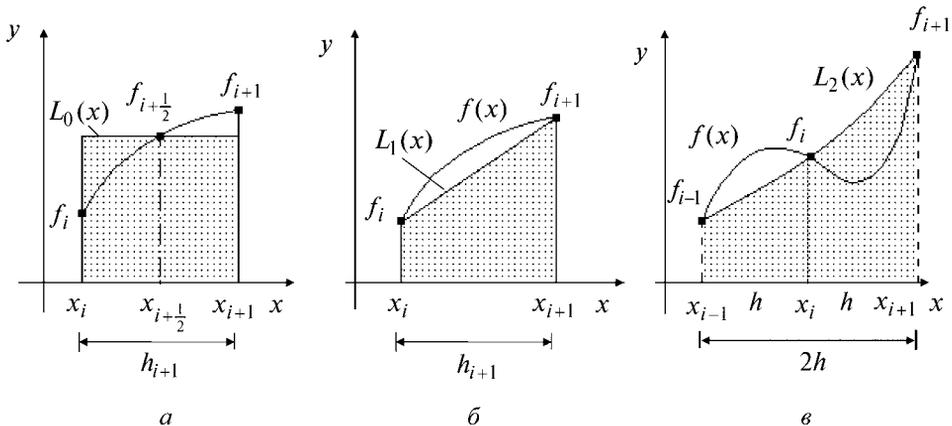


Рис. 5.2

В результате получим простейшие *одноинтервальные квадратурные формулы прямоугольников и трапеций*:

$$\hat{I}_{i,\text{пр}}^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_0(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) dx = h_{i+1} f_{i+\frac{1}{2}}; \quad (5.45)$$

$$\hat{I}_{i,\text{тр}}^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_1(x) dx = \int_0^1 [(1-q)f_i + qf_{i+1}] h_{i+1} dq = h_{i+1} \frac{f_i + f_{i+1}}{2}, \quad (5.46)$$

где при интегрировании учитывалось, что $dx = h_{i+1} \cdot dq$; $q = 0$ при $x = x_i$ и $q = 1$ при $x = x_{i+1}$.

Отметим, что понятие одноинтервальной формулы относится не к шаблону, а к отрезку, на котором вычисляется интеграл. Нижние индексы соответствуют названию квадратурной формулы (пр — прямоугольников, тр — трапеций).

Подчеркнем, что данные формулы справедливы и для нерегулярного шаблона, хотя последующее их суммирование по всем частичным отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$ традиционно выполняется при $h = \text{const}$.

Б. Трехточечный шаблон. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на четное количество одинаковых частичных отрезков, т. е. $n = 2k$, где k — число пар. Проведя аналогичные выкладки для многочлена $L_2(x)$ второй степени, записываемого при $h = \text{const}$ на шаблоне $\Pi_{3,i} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ (по одной паре отрезков при $r = 1, s = 1$), получим *двухинтервальную квадратурную формулу парабол*, или *формулу Симпсона*:

$$\hat{I}_{i-1,\text{пар}}^{i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}). \quad (5.47)$$

Эта же формула может быть получена из (5.23) путем разрешения ее относительно I_{i-1}^{i+1} и подстановки в нее конечно-разностной аппроксимации второй производной $\hat{f}_{i+1}'' = \frac{1}{h^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})$, имеющей второй порядок, или из формулы (4.92) с учетом $I_{i-1}^{i+1} = I_{i-1}^i + I_i^{i+1}$ и $h = \text{const}$.

Дадим геометрические интерпретации квадратурных формул прямоугольников (рис. 5.2а), трапеций (рис. 5.2б) и парабол (рис. 5.2в).

Интегралы обычно определяются не на частичных отрезках, а на всем отрезке $[a, b]$, и поэтому путем суммирования левых и правых частей (5.45)–(5.47) получаются так называемые *составные квадратурные формулы*.

Для сеточной функции $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, заданной на регулярном шаблоне при $h = \text{const}$, эти формулы имеют вид

$$\hat{I}_{a,\text{пр}}^b = h \left(f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{n-1/2} \right) = h \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+\frac{1}{2}}; \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{a,\text{тр}}^b &= h \left(\frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \dots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} \right) = \frac{h}{2} [f_0 + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + f_n] = \\ &= \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right); \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{a,\text{пар}}^b &= \frac{h}{3}[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2k-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2k-2}) + f_n] = \\ &= \frac{h}{3} \left[f_0 + 4 \sum_{i=1}^k f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f_{2i} + f_{2k} \right].\end{aligned}\quad (5.50)$$

Подчеркнем, что в составной квадратурной формуле парабол индекс « k » указывает на число пар отрезков разбиения, которое предполагается четным ($n = 2k$). Если это условие не выполняется, то интеграл вычисляется для четного количества отрезков и к полученному значению добавляется величина I_{n-1}^n , рассчитанная с порядком $O(h^5)$ по формулам, приведенным далее.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Проведем оценку погрешностей одноинтервальных квадратурных формул прямоугольников и трапеций. С этой целью составим разность $I_i^{i+1} - \hat{I}_i^{i+1}$, которую затем преобразуем путем разложения первообразных и функций по формуле Тейлора [17], [23], [24]. Для этого I_i^{i+1} заменим разностью $F_{i+1} - F_i$, а $F(x)$ и функции, входящие в правые части квадратурной формулы, разложим по формуле Тейлора относительно точки x_i ($F(x)$ — первообразная, $F_i = F(x_i)$). Так, для формулы (5.46) при условии, что $f(x) \in C_2[a, b]$, получим

$$\begin{aligned}I_i^{i+1} - \hat{I}_{i,\text{тр}}^{i+1} &= F_{i+1} - F_i - \frac{h_{i+1}}{2}(f_i + f_{i+1}) = F_i + h_{i+1}f_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}f_i' + \frac{h_{i+1}^3}{6}f''(\xi_i) - F_i - \\ &- \frac{h_{i+1}}{2} \left(f_i + f_i + h_{i+1}f_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2}f''(\xi_i) \right) = \frac{h_{i+1}^3}{6}f''(\xi_i) - \frac{h_{i+1}^3}{4}f''(\xi_i) = -\frac{1}{12}h_{i+1}^3f''(\xi_i),\end{aligned}$$

где $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ — одна и та же точка для функций $F(x)$ и $f(x)$. Знак полученной разности указывает на то, что если вторая производная $f''(x)$ на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ положительна, то формула (5.46) аппроксимирует I_i^{i+1} с избытком. Из полученного соотношения для модуля разности $I_i^{i+1} - \hat{I}_{i,\text{тр}}^{i+1}$ вытекает оценка

$$\left| I_i^{i+1} - \hat{I}_{i,\text{тр}}^{i+1} \right| \leq \frac{M_{2,i}}{12} h_{i+1}^3,$$

где $M_{2,i} = \max_{[x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|$, которая означает, что одноинтервальная формула трапеций аппроксимирует I_i^{i+1} с третьим порядком по h .

Чтобы перейти к оценке погрешности аппроксимации интеграла I_a^b по составной формуле формулы трапеций на всем отрезке, соотношения для разности $I_i^{i+1} - \hat{I}_{i,\text{тр}}^{i+1} = -\frac{1}{12}h_{i+1}^3f''(\xi_i)$ необходимо просуммировать по всем частичным отрезкам (при этом полагается $h = \text{const}$):

$$I_a^b - \hat{I}_{a,\text{тр}}^b = -\frac{1}{12}h^3(f''(\xi_0) + f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_{n-1})).$$

Применяя к сумме в правой части утверждение В.1, получаем

$$I_a^b - \hat{I}_{a,тр}^b = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Учитывая, что $n = \frac{b-a}{h}$, $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$, и переходя к неравенству, находим оценку

$$|I_a^b - \hat{I}_{a,тр}^b| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)h^2. \quad (5.51)$$

Отметим, что для оценки погрешностей квадратурных формул имеются и другие способы, изложенные, например в [29], [40].

Оценочная формула (5.51) позволяет сделать следующие выводы.

1. Порядок аппроксимации составной квадратурной формулы трапеций на единицу меньше порядка аппроксимации одноинтервальной формулы и равен двум.

2. Величина остаточного слагаемого зависит от длины отрезка интегрирования $[a, b]$ и M_2 . Константа в правой части равна $\frac{M_2(b-a)}{12}$.

Проделав аналогичные выкладки для одноинтервальной и составной формул прямоугольников и парабол, получим оценки [40]:

$$|I_a^b - \hat{I}_{a,пр}^b| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)h^2; \quad (5.52)$$

$$|I_a^b - \hat{I}_{a,пар}^b| \leq \frac{M_4}{180} (b-a)h^4, \quad (5.53)$$

где $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ при $f(x) \in C_4[a, b]$. Отсюда вытекает, что составная формула прямоугольников имеет на отрезке $[a, b]$ второй порядок аппроксимации и константу $\frac{M_2(b-a)}{24}$, которая в два раза меньше соответствующей константы в оценке погрешности квадратурной формулы трапеций. При $f''(x) > 0$ на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ одноинтервальная формула (5.45) аппроксимирует I_i^{i+1} с недостатком.

Двухинтервальная и составная формулы парабол аппроксимируют I_{i-1}^{i+1} и I_a^b соответственно с пятым и четвертым порядком по h . Причем повышенный на единицу порядок аппроксимации формулы (5.47) по сравнению с порядком, устанавливаемым по правилу соответствия порядков (последний для двухинтервальной формулы парабол равен четырем), получился в силу симметричности этой формулы при $h = \text{const}$.

Замечание. Между максимальной степенью алгебраических многочленов, для которых квадратурная формула является точной, и порядком аппроксимации по отношению к шагу h имеется связь. Формулы прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени и обладают вторым порядком аппроксимации. Формула Симпсона является точной для многочленов третьей степени и имеет четвертый порядок аппроксимации.

Вышеприведенные оценки погрешностей аппроксимационных квадратурных формул позволяют для непрерывных функций априорным путем

вычислять шаг интегрирования, который обеспечивает заданную точность. Для сеточных функций априорные оценки погрешностей выполняются путем предварительной аппроксимации функции $y_i = f(x_i)$ и определения соответствующей величины M_k ($k = 2, 3, 4$) по формулам численного дифференцирования. Далее опишем методику вычисления интеграла с априорным нахождением шага h .

*Методика вычисления определенного
интеграла с заданной точностью
и априорным нахождением
шага интегрирования*

1. Для правой части формулы оценки погрешностей вычислить константу $M_p = \max_{[a,b]} |f^{(p)}(x)|$. С этой целью необходимо продифференцировать функцию p раз и вычислить ее максимальное значение на отрезке $[a, b]$, где p — порядок аппроксимации квадратурной формулы.

2. Из условия

$$\frac{M_p}{A} (b-a) \cdot h^p \leq \varepsilon,$$

где $\frac{M_p}{A}$ — константа, входящая в правую часть оценки погрешностей, определяется величина h :

$$h \leq \sqrt[p]{\frac{A \cdot \varepsilon}{M_p (b-a)}}.$$

3. По значению h вычислить n — количество разбиений отрезка $[a, b]$ и сформировать сеточное представление функции $y = f(x)$, т. е. $y_i = f(x_i)$, $x_0 = a$; $x_1 = a + h$; $x_2 = a + 2h$; ...; $x_n = a + n \cdot h$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

4. Полученную сеточную функцию подставить в правую часть соответствующей квадратурной формулы и вычислить искомое значение \hat{I}_a^b . При этом значение интеграла в силу справедливости оценки удовлетворяет заданной точности ε .

Замечание. Данная методика может быть использована в основном для сеточных представлений формульных функций, для которых можно выбирать величину шага.

Пример 5.8. Вычислить на основе квадратурных формул трапеций интеграл $I_1^2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ с точностью $\varepsilon = 0,01$. Оценить фактическую погрешность вычисленного значения.

□ Воспользуемся методикой.

1. Поскольку $p = 2$, вычислим $M_2 = \max_{[1;2]} |f''(x)|$. Дифференцируя $f(x) = \frac{1}{x}$ дважды, получаем $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Данная функция монотонно убывающая, поэтому она достигает максимума в точке $x = 1$. Таким образом, $M_2 = 2$.

2. Найдем шаг интегрирования, который обеспечивает заданную точность, из условия $\frac{M_2}{12}(b-a)h^2 \leq \varepsilon$. Таким образом,

$$h \leq \sqrt{\frac{12 \cdot \varepsilon}{(b-a)M_2}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,1}{1 \cdot 2}} = 0,245.$$

Примем $h = 0,2$.

3. По значению $h = 0,2$ вычислим $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0,2} = 5$ и сформируем сеточное представление функции, т. е.

$$f_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1, \quad f_1 = \frac{1}{x_0 + h} = \frac{1}{1,2} = 0,83(3), \quad f_2 = \frac{1}{x_0 + 2h} = \frac{1}{1,4} = 0,7142,$$

$$f_3 = \frac{1}{x_0 + 3h} = \frac{1}{1,6} = 0,6250, \quad f_4 = \frac{1}{x_0 + 4h} = \frac{1}{1,8} = 0,5555, \quad f_5 = \frac{1}{x_0 + 5h} = \frac{1}{2} = 0,5000.$$

4. Вычислим интеграл по формуле (5.49) при $n = 5$:

$$\hat{I}_{1, \text{тр}}^2 = \frac{h}{2} \cdot [f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + f_5] =$$

$$= 0,1 \cdot [1 + 2 \cdot [0,83(3) + 0,7142 + 0,625 + 0,5(5)] + 0,5] = 0,695.$$

Точное значение интеграла $I_1^2 = \ln 2 = 0,693147$. Оценим фактическую абсолютную погрешность полученного (приближенного) значения:

$$\delta_{\text{факт}} = |0,69563 - 0,693147| = 0,002483.$$

Из оценки следует, что фактическая погрешность не превышает $0,01$, т. е. $\delta_{\text{факт}} < 0,01 = \varepsilon$. ■

Пример 5.9. Вычислить интеграл $I_1^2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ на основе квадратурной формулы парабол с точностью $\varepsilon = 0,01$. Результат сопоставить с полученным в примере 5.8.

□1, 2. Аналогично примеру 5.8 найдем шаг интегрирования из неравенства

$$\frac{h^4(b-a)}{180} M_4 < \varepsilon, \quad M_4 = \max_{[1;2]} \left| \frac{24}{x^5} \right| = 24, \quad \text{т. е. } h \leq \sqrt[4]{\frac{180 \cdot \varepsilon}{(b-a)M_4}} = 0,52.$$

Примем $h = 0,5$.

3. По значению $h = 0,5$ вычислим $n = \frac{b-a}{h} = \frac{2-1}{0,5} = 2 = 2k$. Следовательно, $k = 1$. Сформируем сеточное представление функции:

$$f_0 = f(1) = 1, \quad f_1 = f(1,5) = \frac{2}{3}, \quad f_2 = f(2) = \frac{1}{2}.$$

Вычислим интеграл по формуле (5.50):

$$\hat{I}_{1, \text{пар}}^2 = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] = 0,6944.$$

Фактическая абсолютная погрешность $\delta_{\text{факт}} = |0,69444 - 0,693147| = 0,001293$. Таким образом, фактическая погрешность не превышает $\varepsilon = 0,01$.

Шаг интегрирования по формуле парабол получился более чем в два раза крупнее шага h , соответствующего квадратурной формуле трапеций. Это является следствием того, что (5.50) имеет четвертый порядок аппроксимации, а (5.49) — второй. В связи с повышенной точностью квадратурной формулы парабол она нашла широкое применение в вычислительной практике. ■

Замечания

1. Рассмотренный способ вычисления интегралов, когда с использованием оценок и точности ε предварительно вычисляется шаг интегрирования h , является способом с *априорным определением шага h* . В вычислительной практике большое распространение получил и другой *апостериорный способ вычисления h* , основанный на многократном дроблении отрезка $[a, b]$. В этом случае интеграл вычисляется с помощью итерационного алгоритма методом Рунге (см. п. 5.4).

2. Существуют и другие широко используемые квадратурные формулы.

Одноинтервальная формула прямоугольников (немодифицированная) на двухточечном шаблоне $\Pi_{2,i} = (x_i, x_{i+1})$, где $r = 0, s = 1$ (рис. 5.3а):

$$\hat{I}_{i,c}^{i+1} = h \cdot f_i \quad (O(h^2)).$$

Четырехинтервальная формула Боде на пятиточечном шаблоне $\Pi_{5,i} = (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$, где $r = 2, s = 2$ (рис. 5.3в):

$$\hat{I}_{i-2,c}^{i+2} = \frac{2h}{45} (7f_{i-2} + 32f_{i-1} + 12f_i + 32f_{i+1} + 7f_{i+2}) \quad (O(h^7)).$$

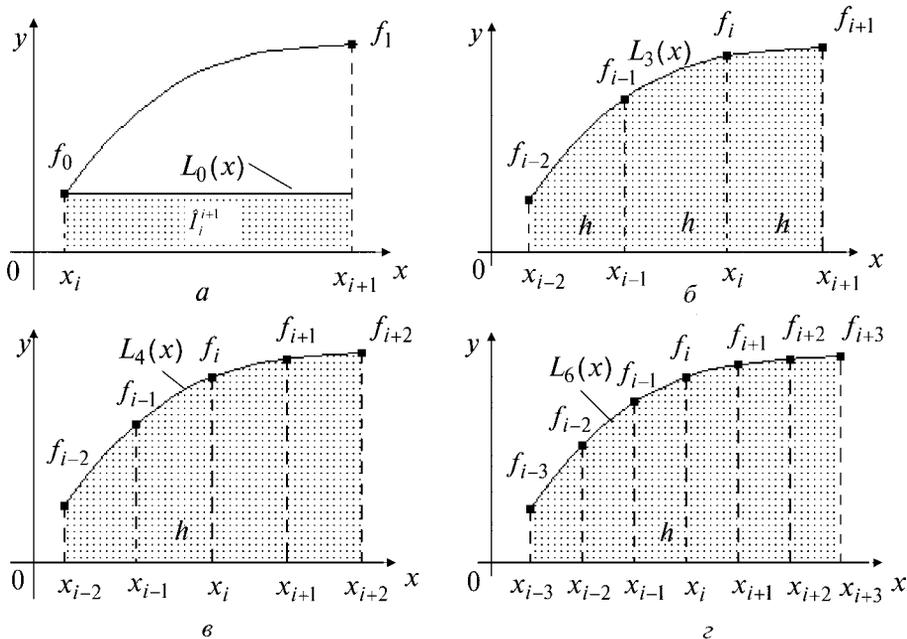


Рис. 5.3

Шестиинтервальная формула Уэддла на семиточечном шаблоне $\Pi_{7,i} = (x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$, где $r = 3, s = 3$ (рис. 5.3з):

$$\hat{I}_{i-3,c}^{i+3} = \frac{3h}{10}(f_{i-3} + 5f_{i-2} + f_{i-1} + 6f_i + f_{i+1} + 5f_{i+2} + f_{i+3}) \quad (O(h^7)).$$

Формулы Ньютона — Котеса (приведем два частных случая):

- *трехинтервальная формула* на четырехточечном шаблоне $\Pi_{4,i} = (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, где $r = 2, s = 1$ (формула «трех восьмых», рис. 5.3б):

$$\hat{I}_{i-2,c}^{i+1} = \frac{3h}{8}(f_{i-2} + 3f_{i-1} + 3f_i + f_{i+1}) \quad (O(h^5));$$

- *шестиинтервальная формула* на семиточечном шаблоне $\Pi_{7,i} = (x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$, где $r = 3, s = 3$ (рис. 5.3з):

$$\hat{I}_{i-3,c}^{i+3} = \frac{h}{140}(41f_{i-3} + 216f_{i-2} + 27f_{i-1} + 272f_i + 27f_{i+1} + 216f_{i+2} + 41f_{i+3}) \quad (O(h^9)).$$

3. Если по условию задачи имеется право выбора узлов и функция обладает высокой степенью гладкости, то часто применяется квадратурная формула Гаусса, в которой весовые коэффициенты и узлы подбираются так, чтобы приближенное равенство было точным для всех многочленов наивысшей степени.

Пример 5.10. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int_0^2 x dx; \quad I_2 = \int_0^2 x^2 dx; \quad I_3 = \int_0^2 x^3 dx; \quad I_4 = \int_0^2 x^4 dx$$

по формулам прямоугольников, трапеций, парабол с шагом $h = 1$. Найти оценки погрешностей.

□ Точные значения интегралов:

$$I_1 = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2; \quad I_2 = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3};$$

$$I_3 = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 4; \quad I_4 = \int_0^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5} = 6,4.$$

Для формул прямоугольников и трапеций порядок аппроксимации $p = 2$, а для формулы парабол $p = 4$. В поставленной задаче $a = 0, b = 2$. Сначала получим оценки погрешностей априорным способом.

Найдем $M_2 = \max_{[0;2]} |f''(x)|$:

- $M_2 = 0$ для функции $f(x) = x$;
- $M_2 = 2$ для функции $f(x) = x^2$;
- $M_2 = 12$ для функции $f(x) = x^3$;
- $M_2 = 48$ для функции $f(x) = x^4$.

Найдем $M_4 = \max_{[0;2]} |f^{(4)}(x)|$:

- $M_4 = 0$ для функций $f(x) = x; f(x) = x^2; f(x) = x^3$;
- $M_4 = 24$ для функции $f(x) = x^4$.

Согласно (5.51)–(5.53), справедливы оценки:

$$|\varepsilon_{\text{пр}}| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)h^2; \quad |\varepsilon_{\text{тр}}| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2; \quad |\varepsilon_{\text{пар}}| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4.$$

Оценки погрешностей формулы прямоугольников:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\text{пр}}| &= 0 \text{ для } f(x) = x; \\ |\varepsilon_{\text{пр}}| &\leq \frac{2}{24} \cdot 2 \cdot 1^2 = 0,16(6) \text{ для } f(x) = x^2; \\ |\varepsilon_{\text{пр}}| &\leq \frac{12}{24} \cdot 2 \cdot 1^2 = 1 \text{ для } f(x) = x^3; \\ |\varepsilon_{\text{пр}}| &\leq \frac{48}{24} \cdot 2 \cdot 1^2 = 8 \text{ для } f(x) = x^4. \end{aligned}$$

Оценки погрешностей формулы трапеций:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\text{тр}}| &= 0 \text{ для } f(x) = x; \\ |\varepsilon_{\text{тр}}| &\leq \frac{2}{12} \cdot 2 \cdot 1^2 = 0,3(3) \text{ для } f(x) = x^2; \\ |\varepsilon_{\text{тр}}| &\leq \frac{12}{12} \cdot 2 \cdot 1^2 = 2 \text{ для } f(x) = x^3; \\ |\varepsilon_{\text{тр}}| &\leq \frac{48}{12} \cdot 2 \cdot 1^2 = 8 \text{ для } f(x) = x^4. \end{aligned}$$

Оценки погрешностей формулы парабол:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\text{пар}}| &= 0 \text{ для } f(x) = x; f(x) = x^2; f(x) = x^3; \\ |\varepsilon_{\text{пар}}| &\leq \frac{24}{180} \cdot 2 \cdot 1^2 = 0,26(6) \text{ для } f(x) = x^4. \end{aligned}$$

Таким образом, подтверждается факт, что формулы прямоугольников и трапеций должны быть точными для многочленов первой степени, а формула парабол — для многочленов не выше третьей степени.

Теперь рассчитаем значения интегралов по соответствующим квадратурным формулам.

При $h = 1$ сеточное представление функций имеет вид

$$f_0 = f(0), \quad f_{\frac{1}{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f_1 = f(1), \quad f_{\frac{3}{2}} = f\left(\frac{3}{2}\right), \quad f_2 = f(2).$$

По формуле прямоугольников (5.48) получаем $\hat{I}_{\text{пр}} = h \cdot \left[\frac{f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}}}{2} \right]$, в частности:

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= 1 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right] = 2 \quad (0); \quad \hat{I}_2 = 1 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \right] = 2,5 \quad (0,16(6)); \\ \hat{I}_3 &= 1 \cdot \left[\frac{1}{8} + \frac{27}{8} \right] = \frac{7}{2} = 3,5 \quad (0,5); \quad \hat{I}_4 = 1 \cdot \left[\frac{1}{16} + \frac{81}{16} \right] = \frac{82}{16} = 5,125 \quad (1,275). \end{aligned}$$

Здесь в скобках указана величина фактической ошибки.

По формуле трапеций (5.49) находим $\hat{I}_{\text{тр}} = \frac{h}{2} \cdot [f_0 + 2f_1 + f_2]$, в частности:

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2} \cdot [0 + 2 + 2] = 2 \text{ (0)}; \quad \hat{I}_2 = \frac{1}{2} \cdot [0 + 2 + 4] = 3 \text{ (0,3(3))};$$

$$\hat{I}_3 = \frac{1}{2} \cdot [0 + 2 + 8] = 5 \text{ (1)}; \quad \hat{I}_4 = \frac{1}{2} \cdot [0 + 2 + 16] = 9 \text{ (2,6)}.$$

По формуле парабол (5.50), учитывая, что $n = 2k = 2$ и, следовательно, $k = 1$, получаем $\hat{I}_{\text{пар}} = \frac{h}{3} \cdot [f_0 + 4f_1 + f_2]$, в частности:

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{3} \cdot [0 + 4 + 2] = 2 \text{ (0)}; \quad \hat{I}_2 = \frac{1}{3} \cdot [0 + 4 + 4] = \frac{8}{3} \text{ (0)};$$

$$\hat{I}_3 = \frac{1}{3} \cdot [0 + 4 + 8] = 4 \text{ (0)}; \quad \hat{I}_4 = \frac{1}{3} \cdot [0 + 4 + 16] = \frac{20}{3} = 6,6(6) \text{ (0,26(6))}.$$

Очевидно, полученные фактические погрешности соответствуют вычисленным ранее оценкам. ■

Пример 5.11. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ методами прямоугольников, трапеций, парабол, Боде, Уэддля, Ньютона — Котеса на семиточечном шаблоне, применяя разбиение на 1, 2, 4, 8 частичных отрезка.

□ Точное значение интеграла:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

Разобьем отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на $l = 1, 2, 4, 8$ частичных отрезка. Применим методы прямоугольников, трапеций, парабол, используя составные формулы (5.48)–(5.50). Остальные значения интеграла подсчитаем по формуле (5.44) при $l = 1, 2, 4, 8$, используя на каждом частичном отрезке соответствующую квадратурную формулу Боде, Уэддля, Ньютона — Котеса на семиточечном шаблоне. Результаты расчетов приведем в таблице 5.4.

Из данного примера видно, что для повышения точности возможны два альтернативных подхода:

а) увеличивать количество частичных отрезков, и на каждом из них использовать более простую квадратурную формулу;

б) применять более точные формулы на пяти- и семиточечном шаблонах при малом количестве частичных отрезков. ■

Т а б л и ц а 5.4

Метод	$l = 1$	$l = 2$	$l = 4$	$l = 8$
Прямоугольников	1,110720338230	1,026171820190	1,006454224265	1,001607874019
Трапеций	0,785398006439	0,948059172335	0,987115496263	0,996784860265
Парабол	1,002279560960	1,000134270907	1,000007981598	1,000000202767
Боде	0,999991251569	0,999999562310	0,999999684178	0,999999686054
Уэддля	0,999999293425	0,999999680058	0,999999685980	0,999999686082
Ньютона — Котеса по 7 точкам	0,999999711921	0,999999686177	0,999999686084	0,999999686083

5.3.2. ФОРМУЛЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Явные формулы

Пусть в общем случае на неравномерной сетке Ω_n с некоторой точностью задана сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = 0, n$. Предположим, что точность этого задания в каждом из узлов не ниже $O(h_{i+1}^3)$. В частном случае $f(x_i)$ является сеточным представлением формульной функции, и тогда сетка может быть выбрана исходя из характера изменения функции $f(x)$. Например, в зонах больших изменений $f(x)$ или ее производных, которые могут быть разрывными, шаг сетки желателно уменьшать. Закон мельчения сетки можно выбирать, например, по формулам арифметической или геометрической прогрессий. В последнем случае в рассмотрение вводится параметр нерегулярности сетки $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$, совпадающий со знаменателем прогрессии. Поэтому данный параметр будем включать здесь в правые части некоторых квадратурных формул и с его использованием проводить оценку погрешности аппроксимации.

Из параболических интегрально-дифференциальных сплайнов путем анализа их параметрических соотношений на трехточечном шаблоне $\Pi_{3,i} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ получаются следующие лево- и правосторонние безусловные аппроксимации интегралов I_{i-1}^i , I_i^{i+1} четвертого порядка (одноинтервальные функциональные аппроксимации):

$$\hat{I}_{i-1,v}^i = \frac{h_i^3}{6H_i^{i+1}} \left(-\frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} + \frac{H_i^{i+1} H_i^{3(i+1)}}{h_i^2 h_{i+1}} f_i + \frac{H_{2i}^{3(i+1)}}{h_i^2} f_{i-1} \right); \quad (5.54)$$

$$\hat{I}_{i,v}^{i+1} = \frac{h_{i+1}^3}{6H_i^{i+1}} \left(\frac{H_{3i}^{2(i+1)}}{h_{i+1}^2} f_{i+1} + \frac{H_i^{i+1} H_{3i}^{(i+1)}}{h_{i+1}^2 h_i} f_i - \frac{1}{h_i} f_{i-1} \right), \quad (5.55)$$

где $H_{hi}^{m(i+1)} = kh_i + mh_{i+1}$.

Предполагая, что $f(x) \in C_3[a, b]$, и используя методику оценки погрешности [40], для данных аппроксимаций нетрудно получить оценки:

$$\left| \hat{I}_{i,v}^{i+1} - I_i^{i+1} \right| \leq \frac{h_i^2 h_{i+1}^2}{72} \delta_{i+1} (\delta_{i+1} + 2) \cdot M_{3,i}; \quad \left| \hat{I}_{i-1,v}^i - I_{i-1}^i \right| \leq \frac{h_i^4}{72} (2\delta_{i+1} + 1) \cdot M_{3,i},$$

где $M_{3,i} = \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'''(x)|$.

При $h = \text{const}$ квадратурные формулы (5.54), (5.55) упрощаются (условная аппроксимация):

$$\hat{I}_{i-1,c}^i = \frac{h}{12} (5f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1}); \quad \hat{I}_{i,c}^{i+1} = \frac{h}{12} (-f_{i-1} + 8f_i + 5f_{i+1}).$$

Их оценки при $\delta_{i+1} = 1$ становятся одинаковыми (с мажорантой $\frac{h^4}{24} M_{3,i}$).

Таким образом, из оценок для $\hat{I}_{i,v}^{i+1}$, $\hat{I}_{i-1,v}^i$ следует, что при безусловной аппроксимации обе квадратурные формулы имеют четвертый порядок по h . Однако для квадратурной формулы (5.55) этот порядок можно повысить, если применить условную аппроксимацию, в которой положить $\delta_{i+1} \leq h_i$. В этом случае из формулы $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i} < h_i$ получаем неравенство $h_{i+1} < h_i^2$, устанавливающее очень малый шаг h_{i+1} , такой, что x_{i+1} отстоит от x_i на величину второго порядка по h_i . Этот тип шаблона можно назвать «сильно сжатым», так как он как бы устремляет трехточечный шаблон к двухточечному, и в связи с этим сама величина интеграла $\hat{I}_{i,v}^{i+1}$ является малой.

Суммируя левые и правые части квадратурных формул (5.54), (5.55), после преобразований получаем компактную, *двухинтервальную, трехточечную обобщенную формулу парабол* функционального типа:

$$\hat{I}_{i-1}^{i+1} = \frac{h_i(\delta_{i+1} + 1)}{6} \left[(2 - \delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{(\delta_{i+1} + 1)^2}{\delta_{i+1}}f_i + \left(2 - \frac{1}{\delta_{i+1}}\right)f_{i+1} \right]. \quad (5.56)$$

Предполагая, что разбиение отрезка $[a, b]$ четное, т. е. $n = 2k$, где k — количество пар разбиения, просуммируем (5.56) по k . Получаем *обобщенную на нерегулярный шаблон составную квадратурную формулу парабол*

$$\begin{aligned} \hat{I}_a^b &= \frac{h_1(1 + \delta_2)(2 - \delta_2)}{6} f_0 + \sum_{i=1}^k \frac{(\delta_{2i} + 1)^3 h_{2i-1}}{6\delta_{2i}} f_{2i-1} + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{k-1} f_{2i} \left[(1 + \delta_{2i})h_{2i-1} \left(2 - \frac{1}{\delta_{2i}}\right) + (1 + \delta_{2i+2})h_{2i+1} (2 - \delta_{2i+2}) \right] + \\ &+ \frac{(1 + \delta_{2n})}{6} h_{2k-1} \left(2 - \frac{1}{\delta_{2n}}\right) f_{2k}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Известно, что для квадратурных формул важно, чтобы их коэффициенты были положительны. Это свойство, называемое *свойством положительности коэффициентов*, обеспечивает минимум погрешности вычисления интеграла по данной квадратурной формуле, а также сходимость вычислительного процесса на последовательно сгущающихся сетках [28]. В квадратурной формуле (5.56) свойство положительности будет выполнено, если $2 - \delta_{i+1} > 0$, $2 - \frac{1}{\delta_{i+1}} > 0$. Отсюда вытекают пределы изменения параметра нерегулярности δ_{i+1} : $0,5 < \delta_{i+1} < 2$.

Предполагая, что $f(x) \in C_3[a, b]$, для (5.56) получаем остаточное слагаемое и оценку погрешности:

$$\left| I_{i-1}^{i+1} - \hat{I}_{i-1}^{i+1} \right| \leq \frac{h_i^4 |\delta_{i+1}^2 - 1|}{72} (\delta_{i+1} + 1)^2 M_{3,i}. \quad (5.58)$$

Переходя в (5.58) к мажоранте для оценки интеграла на всем отрезке $[a, b]$, имеем

$$\left| I_a^b - \hat{I}_a^b \right| \leq \frac{H_m^4 \tilde{\Delta}_m n}{72} (\Delta_m + 1)^2 M_3 \leq \frac{(b-a) H_m^3 \tilde{\Delta}_m}{144} (\Delta_m + 1)^2 M_3,$$

где $H_m = \max_i |h_i|$, $i = \overline{1, n}$, $\tilde{\Delta}_m = \max_i |\delta_{i+1}^2 - 1|$, $\Delta_m = \max_i \delta_{i+1}$, $M_3 = \max_{[a,b]} |f'''(x)|$.

Приведем анализ соотношения (5.58), устанавливающего порядок аппроксимации обобщенной квадратурной двухинтервальной формулы парабол.

В общем случае квадратурная формула (5.56) имеет четвертый порядок аппроксимации (безусловная аппроксимация). Возможны также условные аппроксимации двух типов:

а) при $\delta_{i+1} = 1$ реализуется регулярный шаблон и тогда порядок аппроксимации повышается на единицу, а (5.56) переходит в классическую формулу парабол (Симпсона);

б) при $|\delta_{i+1} - 1| \leq h_i$ реализуется нерегулярный шаблон, и тогда порядок аппроксимации может быть повышен на единицу за счет небольшого отклонения δ_{i+1} от единицы: $h_i - h_i^2 \leq h_{i+1} \leq h_i + h_i^2$. В этом случае шаблон является *квазирегулярным*. Такие разбиения с локальными сгущениями узлов сетки могут формироваться при численном интегрировании с помощью квадратурной формулы (5.56) сильно изменяющихся функций или функций, имеющих в некоторых окрестностях разрывы производных.

Неявные методы

Из анализа параметрических соотношений (4.101) и (4.105) двух типов параболических интегрально-дифференциальных сплайнов, изложенных в п. 4.5.5, для внутренних узлов получаются системы линейных алгебраических уравнений относительно интегралов:

$$\frac{1}{h_i^2} I_{i-1}^i + \frac{2}{h_{i+1}^2} I_{i+1}^{i+1} + \frac{1}{h_{i+2}^2} I_{i+1}^{i+2} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{h_i} f_{i-1} + \left(\frac{2}{h_i} + \frac{3}{h_{i+1}} \right) f_i + \left(\frac{3}{h_{i+1}} + \frac{2}{h_{i+2}} \right) f_{i+1} + \frac{1}{h_{i+2}} f_{i+2} \right],$$

$$i = \overline{1, n-2};$$

$$\frac{1}{h_i} I_{i-1}^i - \frac{2}{h_{i+1}} I_{i+1}^{i+1} + \frac{1}{h_{i+2}} I_{i+1}^{i+2} = \frac{1}{6} \left[-h_i f'_{i-1} - H_{2i}^{i+1} f'_i + H_{i+1}^{2(i+2)} f'_{i+1} + h_{i+2} f'_{i+2} \right], \quad i = \overline{1, n-2},$$

которые при $h = \text{const}$ преобразуются к виду

$$I_{i-1}^i + 2I_{i+1}^{i+1} + I_{i+1}^{i+2} = \frac{h}{3} [f_{i-1} + 5 \cdot (f_i + f_{i+1}) + f_{i+2}], \quad i = \overline{1, n-2};$$

$$I_{i-1}^i - 2I_{i+1}^{i+1} + I_{i+1}^{i+2} = \frac{h^2}{6} [-f'_{i-1} + 3 \cdot (f'_{i+1} - f'_i) + f'_{i+2}], \quad i = \overline{1, n-2}.$$

Для вычисления интегралов на всех отрезках эти системы необходимо дополнить двумя граничными условиями. Это можно сделать двумя способами.

1. Системы дополняют значениями интегралов I_0^1 и I_{n-1}^n на конечных отрезках, которые вычисляются по односторонним формулам (5.54), (5.55) соответственно.

2. Каждая из систем может быть дополнена двумя связями при $i = 1$ и $i = n - 1$, которые выражаются из соотношения

$$\frac{1}{h_i^2} I_{i-1}^i + \frac{1}{h_{i+1}^2} I_{i+1}^{i+1} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{h_i} f_{i-1} + 2 \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) f_i + \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} \right].$$

Замечания

1. Первая из приведенных здесь систем связывает искомые интегралы со значениями интегрируемой функции, а вторая — со значениями производных.

2. Описанные методы применимы для сеточных функций с $n \geq 3$.

3. Полученные системы линейных алгебраических уравнений являются трехдиагональными и решаются методом прогонки (см. главу 1).

ПРИМЕНЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Явные формулы

Если кубические многочлены, построенные на $[x_i, x_{i+1}]$ с помощью функциональных, дифференциальных и интегральных параметров f_i, f'_i, I_i^{i+1} , использовать для вывода квадратурных формул, то получаются различные типы одноинтервальных *функционально-дифференциальных* квадратурных формул Эйлера пятого порядка.

Квадратурная формула Эйлера — Маклорена имеет вид [2]

$$\hat{I}_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}}{2}(f_i + f_{i+1}) - \frac{h_{i+1}^2}{12}(f'_{i+1} - f'_i) \left(\frac{h_{i+1}^5}{720} M_{4,i} \right). \quad (5.59)$$

Суммируя (5.59) по всем отрезкам, записываем *составную квадратурную формулу Эйлера* четвертого порядка аппроксимации на нерегулярной сетке:

$$\hat{I}_{a,v}^b = \frac{h_1}{2} f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} H_i^{i+1} f_i + \frac{h_n}{2} f_n - \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{n-1} h_{i+1}^2 \Delta f'_{i+1}. \quad (5.60)$$

Подчеркнем, что производные f'_i для подстановки в (5.60) предварительно должны быть вычислены по вышеприведенным аппроксимационным формулам с порядком не ниже третьего. Сокращать производные в последнем слагаемом составной квадратурной формулы, как это обычно делается в учебниках по численным методам, не следует, поскольку при этом в сущности предполагается, что все производные во внутренних узлах известны точно. Это условие для сеточных функций, от которых рассчитываются интегралы, не должно использоваться, так как производные этих функций вычисляются с некоторой погрешностью, порядок которой при суммировании по всем частичным отрезкам понижается на единицу. Справедливость этого утверждения подтверждается следующим примером. После суммирования и сокращения в последней сумме квадратурной формулы (5.60) производных во всех внутренних узлах при $h = \text{const}$ формула (5.60) приобретает вид

$$\hat{I}_a^b = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right) - \frac{h^2}{12} (f'_n - f'_0). \quad (5.61)$$

Если квадратурную формулу (5.61) использовать для вычисления интеграла от функции с нулевыми производными на концах или с их одинаковы-

ми значениями $f'_n = f'_0$, то квадратурная формула четвертого порядка переходит в квадратурную формулу трапеций, имеющую второй порядок. Таким образом, реализуется потеря двух порядков, что свидетельствует о необоснованности проведенного сокращения.

Квадратурную формулу (5.59) целесообразно применить для получения функциональных квадратурных формул путем подстановки в них конкретных аппроксимаций \hat{f}'_{i+1} , \hat{f}'_i . Подставив, например, оператор $\hat{f}'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$, а также аппроксимации производных в левой и правой крайних точках четырехточечного шаблона, получим *одноинтервальные функциональные квадратурные формулы* — центральную и лево- и правостороннюю:

$$\hat{I}_{i,\text{центр}}^{i+1} = \frac{h}{24}(-f_{i-1} + 13(f_i + f_{i+1}) - f_{i+2}) \left(\frac{11}{720} h_{i+1}^5 M_{4,i} \right); \quad (5.62)$$

$$\hat{I}_{i,\text{лев}}^{i+1} = \frac{h}{24}(9f_i + 19f_{i+1} - 5f_{i+2} + f_{i+3}) \left(\frac{19}{720} h_{i+1}^5 M_{4,i} \right); \quad (5.63)$$

$$\hat{I}_{i,\text{прав}}^{i+1} = \frac{h}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1}) \left(\frac{19}{720} h_{i+1}^5 M_{4,i} \right). \quad (5.64)$$

Последние три квадратурные формулы (5.62)–(5.64) могут быть объединены в единую *составную квадратурную формулу*:

$$\hat{I}_a^b = \hat{I}_{0,\text{лев}}^1 + \frac{h}{24} \left(-f_0 + 12f_1 + 25f_2 + 24 \sum_{i=3}^{n-3} f_i + 25f_{n-2} + 12f_{n-1} - f_n \right) + \hat{I}_{n-1,\text{прав}}^n.$$

Данная формула для всех внутренних узлов удовлетворяет условию положительности коэффициентов. Отметим также, что хотя порядок аппроксимации формулы (5.62) равен порядку аппроксимации квадратурной формулы парабол, однако их аппроксимационные свойства различаются. Это связано с тем, что квадратурная формула (5.62) вытекает из полинома третьей степени, а формула парабол — из полинома второй степени. Поэтому квадратурная формула (5.62) учитывает, например, наличие точки перегиба, если она имеется в интегрируемых функциях, в то время как формула парабол этого не позволяет, так как получается из многочлена второй степени. Это обуславливает преимущество формулы (5.62) по сравнению с формулой парабол при интегрировании функций, имеющих указанную, а также другие особенности, присущие полиномам нечетной степени.

Неявный метод

Неявный метод численного интегрирования получается путем анализа параметрических соотношений кубических интегрально-дифференциальных сплайнов. После преобразования соотношения (5.59) путем подстановки в него производных из п. 5.2.3 на нерегулярной сетке для внутренних узлов получается система линейных алгебраических уравнений относительно интегралов

$$\begin{aligned}
& \frac{h_{i+1}^3}{3h_i^2 H_{i+1}^i} I_{i-1}^i + \left(1 - \frac{h_i}{3H_{i+1}^{i+1}} - \frac{h_{i+2}}{3H_{i+1}^{i+2}}\right) I_i^{i+1} + \frac{h_{i+1}^3}{3h_{i+2}^2 H_{i+1}^{i+2}} I_{i+1}^{i+2} = \\
& = \frac{h_{i+1}^3}{12h_i H_{i+1}^i} f_{i-1} + \frac{h_{i+1}}{2} \left(1 - \frac{h_{i+2}}{6H_{i+1}^{i+2}} + \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2h_i H_{i+1}^{i+1}}\right) f_i + \\
& + \frac{h_{i+1}}{2} \left(1 + \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+2}^2}{2h_{i+2} H_{i+1}^{i+2}} - \frac{h_i}{6H_{i+1}^{i+1}}\right) f_{i+1} + \frac{h_{i+1}^3}{12h_{i+2} H_{i+1}^{i+2}} f_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

На регулярной сетке эта система преобразуется к более простому виду:

$$I_{i-1}^i + 4I_i^{i+1} + I_{i+1}^{i+2} = \frac{h}{4} [f_{i-1} + 11 \cdot (f_i + f_{i+1}) + f_{i+2}], \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \tag{5.66}$$

Для вычисления интегралов на всех отрезках эти системы необходимо дополнить значениями I_0^1 и I_{n-1}^n , которые могут быть вычислены по квадратурной формуле (5.59) при $h_i = \text{var}$ или по формулам (5.63), (5.64) при $h = \text{const}$. Полученная в результате система линейных алгебраических уравнений решается методом прогонки (см. главу 1).

Система (5.65) удовлетворяет условию преобладания диагональных элементов в следующем диапазоне изменения параметра нерегулярности:

$$\delta_*^{-1} \leq \delta_{i+1} \leq \delta_*,$$

где $\delta_* \approx 1,722$.

Для системы (5.66) в [24] дана оценка погрешности вычисления интеграла \hat{I}_a^b на всем отрезке $[a, b]$, которая имеет вид

$$\left| I_a^b - \hat{I}_{a,\text{неяв}}^b \right| \leq \frac{h^4(a-b)}{360} M_4,$$

где $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Явные формулы

В данном пункте приводятся функционально-дифференциальные квадратурные формулы, полученные из интегрально-дифференциальных многочленов четвертой степени [16]. В соответствии с порядком аппроксимации многочленами четвертой степени, который равен пяти, порядок аппроксимации интегралов равен шести.

Одноинтервальные явные квадратурные формулы, представляющие функционально-дифференциальные аппроксимации на трехточечном шаблоне $\Pi_{3,i} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, имеют вид

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{i-1,v}^i = P_0 \left[\frac{2}{h_i^2} \left(\frac{7}{h_i} + \frac{6}{h_{i+1}} \right) f_{i-1} + \left(\frac{16}{h_i^3} + \frac{18}{h_i^2 h_{i+1}} - \frac{2}{h_{i+1}^3} \right) f_i + \frac{2}{h_{i+1}^3} f_{i+1} + \right. \\
\left. + \frac{1}{h_i} \left(\frac{2}{h_i} + \frac{3}{2h_{i+1}} \right) f_{i-1}' - \left(\frac{3}{h_i^2} + \frac{9}{2h_i h_{i+1}} + \frac{3}{2h_{i+1}^2} \right) f_i' - \frac{1}{2h_{i+1}^2} f_{i+1}' \right];
\end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{i,v}^{i+1} = P_0 & \left[\frac{2}{h_i^3} f_{i-1} + \left(-\frac{2}{h_i^3} + \frac{18}{h_i h_{i+1}^2} + \frac{16}{h_{i+1}^3} \right) f_i + \frac{2}{h_{i+1}^2} \left(\frac{6}{h_i} + \frac{7}{h_{i+1}} \right) f_{i+1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2h_i^2} f'_{i-1} + \left(\frac{3}{2h_i^2} + \frac{9}{2h_i h_{i+1}} + \frac{3}{h_{i+1}^2} \right) f'_i - \frac{1}{h_{i+1}} \left(\frac{3}{2h_i} + \frac{2}{h_{i+1}} \right) f'_{i+1} \right], \end{aligned} \quad (5.68)$$

где $P_0 = \frac{30}{h_k^2} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right)$, $k = i, i+1$, соответственно для (5.67), (5.68).

На *регулярном шаблоне* эти формулы упрощаются:

$$\hat{I}_{i-1,c}^i = \frac{h}{30} (13f_{i-1} + 16f_i + f_{i+1}) - \frac{h^2}{120} (f'_{i+1} + 18f'_i - 7f'_{i-1}) \left(\frac{h^6}{7200} M_{5,i} \right); \quad (5.69)$$

$$\hat{I}_{i,c}^{i+1} = \frac{h}{30} (f_{i-1} + 16f_i + 13f_{i+1}) - \frac{h^2}{120} (7f'_{i+1} - 18f'_i - f'_{i-1}) \left(\frac{h^6}{7200} M_{5,i} \right). \quad (5.70)$$

Суммирование формул (5.69), (5.70) приводит к *двухинтервальной квадратурной формуле* (модифицированной формуле Эйлера):

$$\hat{I}_{i-1,c}^{i+1} = \frac{h}{15} (7f_{i-1} + 16f_i + 7f_{i+1}) - \frac{h^2}{15} (f'_{i+1} - f'_{i-1}) \left(\frac{h^7}{4725} M_{5,i} \right). \quad (5.71)$$

Порядок аппроксимации в этой формуле повышается на единицу из-за симметричного вида формулы (5.71).

Подставляя в функционально-дифференциальные квадратурные формулы аппроксимации производных на пятиточечном шаблоне с порядком $O(h^4)$, получаем *функциональные квадратурные формулы шестого порядка*:

$$\hat{I}_{i-1}^i = \frac{h}{720} (-19f_{i-2} + 346f_{i-1} + 456f_i - 74f_{i+1} + 11f_{i+2}) \left(\frac{7}{7200} h^6 M_{5,i} \right); \quad (5.72)$$

$$\hat{I}_i^{i+1} = \frac{h}{720} (11f_{i-2} - 74f_{i-1} + 456f_i + 346f_{i+1} - 19f_{i+2}); \quad (5.73)$$

$$\hat{I}_{i-1}^{i+1} = \frac{h}{90} (-f_{i-2} + 34f_{i-1} + 114f_i + 34f_{i+1} - f_{i+2}) \left(\frac{h^7}{756} M_{6,i} \right). \quad (5.74)$$

Подстановка в формулы (5.69), (5.70) лево- и правосторонних аппроксимаций производных в крайних точках шаблона приводит к *лево- и правосторонним квадратурным формулам шестого порядка*:

$$\hat{I}_{i-1}^i = \frac{h}{720} (251f_{i-1} + 646f_i - 264f_{i+1} + 106f_{i+2} - 19f_{i+3});$$

$$\hat{I}_i^{i+1} = \frac{h}{720} (-19f_{i-3} + 106f_{i-2} - 264f_{i-1} + 646f_i + 251f_{i+1}).$$

Для расчета интегралов $\hat{I}_{i-1,v}^i$, $\hat{I}_{i,v}^{i+1}$ на *нерегулярной сетке* по формулам (5.67), (5.68) предварительно необходимо рассчитать производные в соответствующих точках с порядком не ниже четвертого. С этой целью необходимо воспользоваться интерполяционным многочленом четвертой степени.

Неявный метод

В заключение данного пункта приведем неявный метод вычислений интегралов на всех частичных отрезках путем решения системы линейных алгебраических уравнений трехдиагонального вида ($h = \text{const}$):

$$7I_{i-1}^i + 19I_i^{i+1} + 4I_{i+1}^{i+2} = h \cdot (2f_{i-1} + 15f_i + 12f_{i+1} + f_{i+2}) \quad (i = \overline{1, n-2}).$$

Данная система должна быть дополнена значениями интегралов I_0^1, I_{n-1}^n , которые рассчитываются по вышеприведенным квадратурным формулам.

Можно показать, что неявный алгоритм вычисления интеграла на отрезке $[a, b]$ имеет оценку [24]:

$$|I_a^b - \hat{I}_a^b| \leq \frac{h^5(b-a)}{180} M_5.$$

5.3.3. ФОРМУЛЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

Пусть $f(x) \in C_{m+1}[a, b]$ — формульная функция. Тогда из разложений первообразной $F(x)$ по формуле Тейлора относительно точек x_i и x_{i+1} и выражений для $F_{i+1} = F(x_{i+1})$ и $F_i = F(x_i)$ после преобразований получают *одноинтервальные обобщенные квадратурные формулы Эйлера*, которые имеют функционально-дифференциальный тип (см. формулу (В.24) и п. 5.2.2):

$$\hat{I}_{i,1}^{i+1} = h_{i+1}f_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}f'_i + \frac{h_{i+1}^3}{6}f''_i + \dots = h_{i+1} \sum_{k=0}^m \frac{h_{i+1}^k}{(k+1)!} f_i^{(k)} \left(\frac{h_{i+1}^{m+2} M_{m+1}}{(m+2)!} \right); \quad (5.75)$$

$$\hat{I}_{i,2}^{i+1} = h_{i+1}f_{i+1} - \frac{h_{i+1}^2}{2}f'_{i+1} + \frac{h_{i+1}^3}{6}f''_{i+1} + \dots = h_{i+1} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{h_{i+1}^k}{(k+1)!} f_{i+1}^{(k)} \left(\frac{h_{i+1}^{m+2} M_{m+1}}{(m+2)!} \right). \quad (5.76)$$

В скобках справа от квадратурных формул (5.75), (5.76) указаны мажоранты, характеризующие оценки их погрешностей. На рисунке 5.4 показан

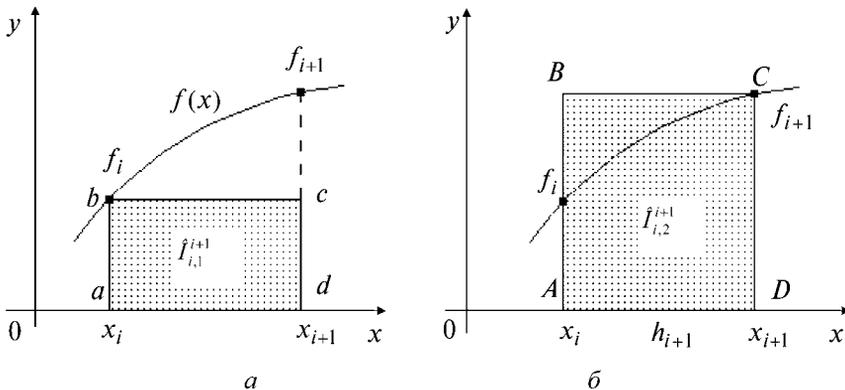


Рис. 5.4